Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Севастопольский национальный технический
университет

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННЫМИ СТАТИСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Методические указания к выполнению лабораторной работы №2
по дисциплине «Методы информационной оптимизации систем и процессов»
для магистрантов специальности 07.080401 «Информационные управляющие системы и технологии»

Севастополь
2012

УДК 621.391:681.05.015.23

Методические указания к выполнению лабораторной работы №2 по дисциплине «Методы информационной оптимизации систем и процессов» / Сост. С. В. Доценко, А. Ю. Дрозин – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 14 с.

Целью методических указаний является помощь студентам в выполнении лабораторной работы. Излагаются теория к выполнению данной лабораторной работы, требования к содержанию отчета.

Методические указания предназначены для магистрантов специальности 07.080401 «Информационные управляющие системы и технологии»

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Информационных систем, протокол №7 от 23.02.2011 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Скороход Б. А., д. т. н., профессор кафедры Технической кибернетики.

СОДЕЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1) Освоение программного моделирования стационарных случайных процессов средствами программного пакета MATLAB.
2) Выполнение расчета оценок статистических характеристик процессов, полученных путем такого моделирования.
3) Аппроксимация полученных числовых данных аналитическими зависимостями, удобными для дальнейшего применения.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Под статистическим моделированием понимается воспроизведение с помощью компьютера функционирования вероятностной модели некоторого объекта. В настоящей работе такой моделью является модель случайного стационарного процесса с заданными статистическими свойствами, описываемыми его корреляционной функцией и спектральной плотностью

В соответствии с теорией сформировать случайный процесс с заданной корреляционной функцией можно, в частности, следующим образом. Необходимо сначала сформировать случайный процесс, являющийся нормально (по гауссовскому закону) распределенным белым шумом, а затем пропустить его через некоторое динамическое звено (формирующий фильтр). На выходе получается нормально распределенный случайный процесс с корреляционной функцией, вид которой определяется типом формирующего фильтра как динамического звена.

Белый гауссовский шум в MATLAB образуется при помощи функции randn(M,N). Эта функция создает матрицу размером M строк и N столбцов из случайных чисел, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным (среднеквадратическим) отклонением, равным единице. Например,

```
>> randn(3,5)
ans =
  -0.4326    0.2877    1.1892    0.1746   -0.5883
  -1.6656   -1.1465   -0.0376   -0.1867    2.1832
   0.1253    1.1909    0.3273    0.7258   -0.1364
```

Полученные числа не коррелируют друг с другом. Для создания белого шума достаточно задать интервал дискретизации (т.е. временной интервал между соседними числами) Ts, образовать с этим шагом массив (вектор) t моментов времени в нужном диапазоне его изменения, а затем сформировать с помощью указанной функции вектор-строку длиной, равной длине вектора t, например:

```
>> Ts=0.01;                    % интервал дискретизации
>> t=0 : Ts : 20;              % вектор моментов времени
>> x1=randn(1, length(t));     % белый шум
```

Построим график полученного процесса:

```
>> plot(t,x1),grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',16) % график процесса
>> title('Белый шум (Ts=0.01)');                % название графика
>> xlabel('ВремЯ (с)');                         % подпись на оси абсцисс
>> ylabel('x1(t)')                              % подпись на оси ординат
```

Полученный процесс представлен на рисунке 1.

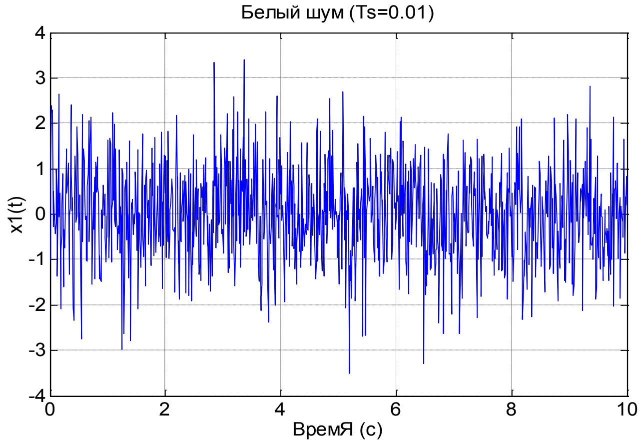

Рисунок 1 — Модель белого шума

Рассмотрим способ формирования случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции

$$B_k(Dk) = \sigma_k^2 a^{|Dk|}, \quad |a| < 1. \tag{1}$$

Для формирования сигнала с такой корреляционной функцией необходимо пропустить белый шум через дискретный фильтр, корреляционная функция импульсной характеристики которого имеет вид (1). Этому требованию удовлетворяет импульсная характеристика вида

$$h(k) = \sigma_x \sqrt{1-a^2}\, a^k, \quad k \geq 0. \tag{2}$$

Такая характеристика соответствует рекурсивному фильтру первого порядка с коэффициентом обратной связи, равным a. Требуемую фильтрацию можно осуществить с помощью функции filter:

```
>> N=1000;                          % число отсчетов процесса
>> X0=randn(1,N);                   % независимые нормальные отсчеты
>> a=0.9;                           % параметр экспоненциальной корреляции
>> sigma=2;                         % среднеквадратическое значение результата
>> X1=filter(sigma*sqrt(1-a^2), [1 -a], X0);  % фильтрация
>> subplot(2, 1, 1)
>> plot(X0(1:200)),grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12) % график белого шума
>> title('Белый шум')
>> subplot(2, 1, 2)
>> plot(X1(1:200)),grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12) % график коррелированного шума
>> title('Коррелированный шум')
>> subplot(2, 1, 2)
>> plot(X1(1:200))                  % график коррелированного шума
>> title('Коррелированный шум')
```

Графики белого шума и соответствующего ему экспоненциально коррелированного случайного процесса показаны на рисунке 2. Хорошо видно, что коррелированный процесс сильно сглажен по сравнению с белым шумом.

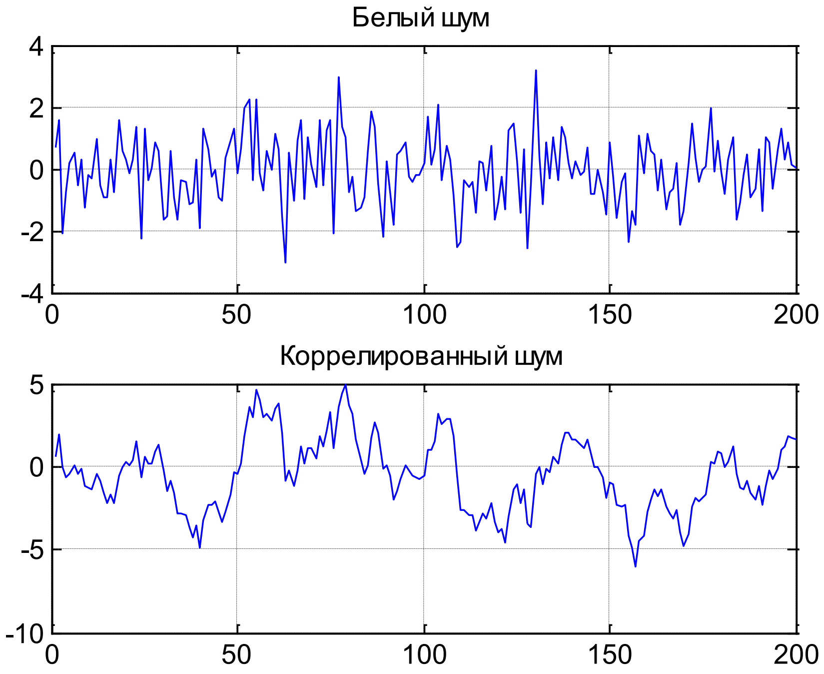

Рисунок 2 — Белый шум и коррелированный процесс

Распределения смоделированных случайных числовых последовательностей можно визуализировать с помощью построения их гистограмм. Построение таких гистограмм выполняется с помощью функции hist (рисунок 3).

```
>> subplot(2,1,1)
>> hist(X0, 25)                      % гистограмма на 25 интервалов
>> grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12)
>> title('Белый шум')
>> subplot(2,1,2)
>> hist(X1, 25)                      % гистограмма на 25 интервалов
>> grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12)
>> title('Коррелированный шум')
```

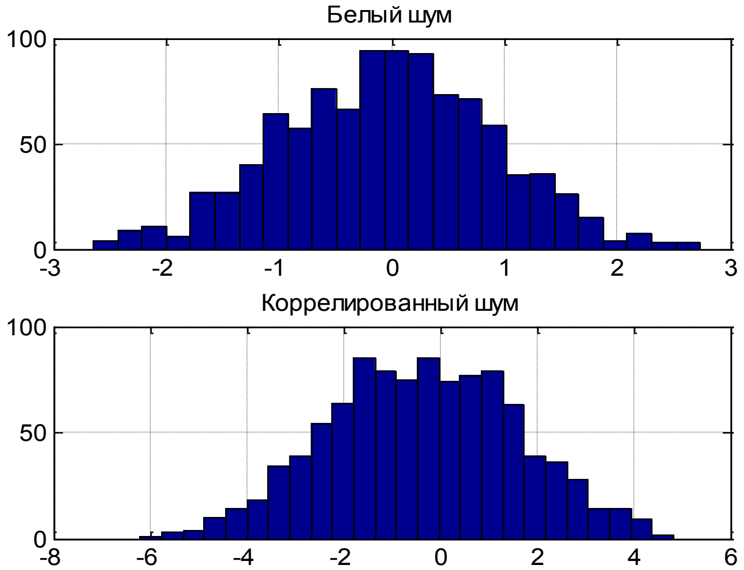

Рисунок 3 — Гистограммы белого шума и коррелированного процесса

Полученные гистограммы показывают удовлетворительное соответствие смоделированных величин нормальному закону распределения.

Для оценки корреляционной матрицы случайного процесса по вектору его отсчетов с использованием временного усреднения служит функция corrmtx, имеющая следующий синтаксис:

[X, B]=corrmtx(x, m, ‘method’)

Здесь x – вектор отсчетов процесса (в нашем случае это либо X0, либо X1), m - размерность рассчитываемой корреляционной матрицы, величина которой обычно не превосходит 10% длины исходной последовательности x. Необязательный строковый параметр ‘method’ управляет тем, как обрабатываются крайние отсчеты сигнала. С его возможными значениями можно познакомиться по документации пакета Signal Processing.

Результатами работы функции являются матрица промежуточных данных X (которая не представляет для нас интереса) и собственно корреляционная матрица R, являющаяся в данном случае целью наших расчетов.

Здесь следует сделать важное замечание. Понятие «корреляционная» в MATLAB используется в зарубежной трактовке. Это означает, что функция corrmtx не центрирует сигнал перед вычислением корреляционной матрицы. Но поскольку в приведенных выше примерах процессы изначально центрированы, это не приводит к каким либо недоразумениям. Если же моделированные процессы не центрированы, их необходимо предварительно центрировать.

В качестве примера вычислим корреляционные функции и построим графики их первых строк для сформированных выше белого шума X0 и экспоненциально коррелированного случайного процесса X1.

```
>> N1=20;                          % размер корреляционного вектора
>> [tmp,B0]=corrmtx(X0,N1);        % корреляционный вектор процесса X0
>> [tmp,B1]=corrmtx(X1,N1);        % корреляционный вектор процесса X1
>> k=0:N1;                         % индексы корреляционных функций
>> subplot(2,1,1)
>> stem(k,B0(1,:))      % «стебельковый» график корреляционного вектора
                         % белого шума
>> grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12)
>> title('Белый шум')
>> subplot(2,1,2)
>> stem(k,B1(1,:))     % «стебельковый» график корреляционного вектора
                        % коррелированного шума
>> grid, set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12)
>> title('Коррелированный шум')
```

Результаты этих вычислений приведены на рисунке 4. Из графиков видно, что отсчеты белого шума действительно некоррелированы, а отсчеты фильтрованного шума действительно дают требуемую экспоненциальную функцию корреляции.

Численные значения корреляционных функций имеют вид:

- Для вектора X0

```
>> B0(1,:)
```

ans = 0.8911 0.0117 -0.0186 0.0190 0.0079 -0.0313 0.0233 0.0108 0.0009 0.0532 0.0487 -0.0107 0.0308 0.0371 -0.0387 0.0151 0.0347 -0.0236 0.0327 0.0009 0.0204

- Для вектора X1

  >> B1(1,:)

  ans = 3.9662 3.6118 3.2873 3.0141 2.7594 2.5287 2.3527 2.1831 2.0290 1.8969 1.7400 1.5607 1.4087 1.2466 1.0672 0.9326 0.7959 0.6396 0.5107 0.3599 0.2129

Читать их следует по строкам.

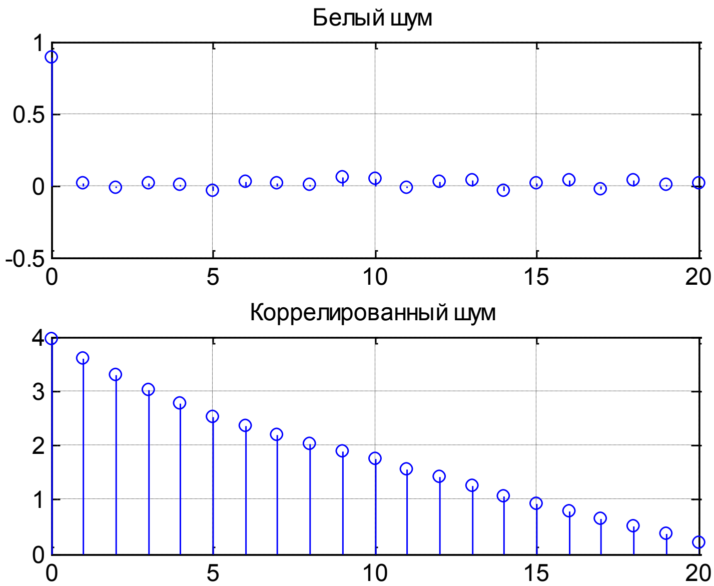

Рисунок 4 — Оценка корреляционных функций белого шума и коррелированного процесса

Аппроксимируем массив B1(1,:) экспонентой. Для этого воспользуемся программным пакетом CurveExpert v.1.34, не входящим в систему MATLAB. Получим зависимость, представленную на рисунке 5. На ней точками изображен нормированный массив B1(1,:).

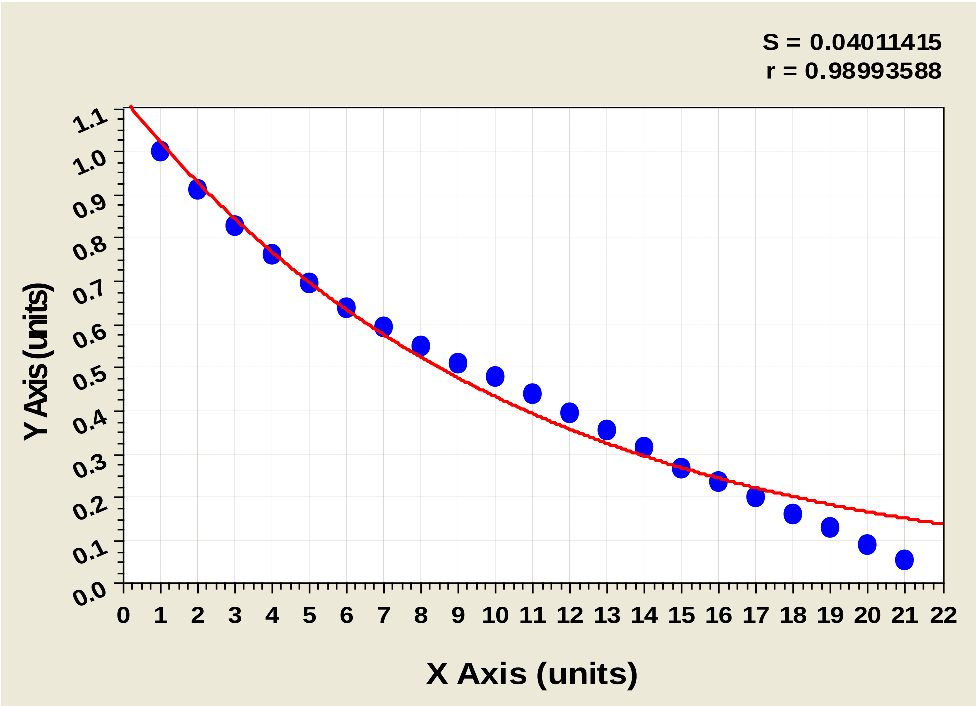

Рисунок 5 — Аппроксимация экспериментальных данных экспонентой

Сплошной линией изображена экспонента

$$B1(k) = a_e e^{-b|k|}, \tag{3}$$

коэффициенты которой равны a_e = 1.1242115 и b = -0.09561563. Экспонента с такими коэффициентами наилучшим образом аппроксимирует экспериментальную кривую.

Параметры экспоненты можно просмотреть во вкладке Information (рисунок 6).

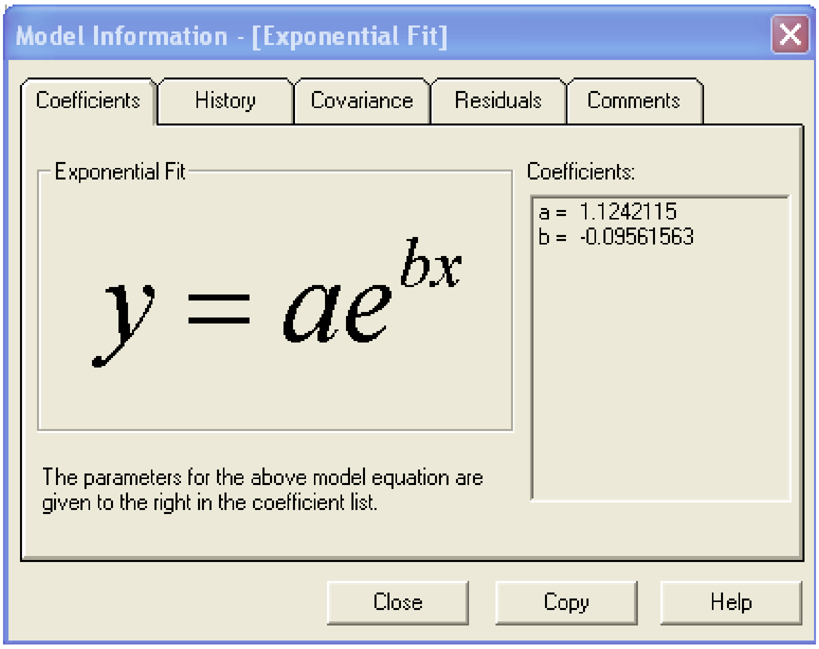

Рисунок 6 — Параметры аппроксимирующей экспоненты

Наилучшая аппроксимация достигается при замене B1(1,:) полиномом (рисунок 7):

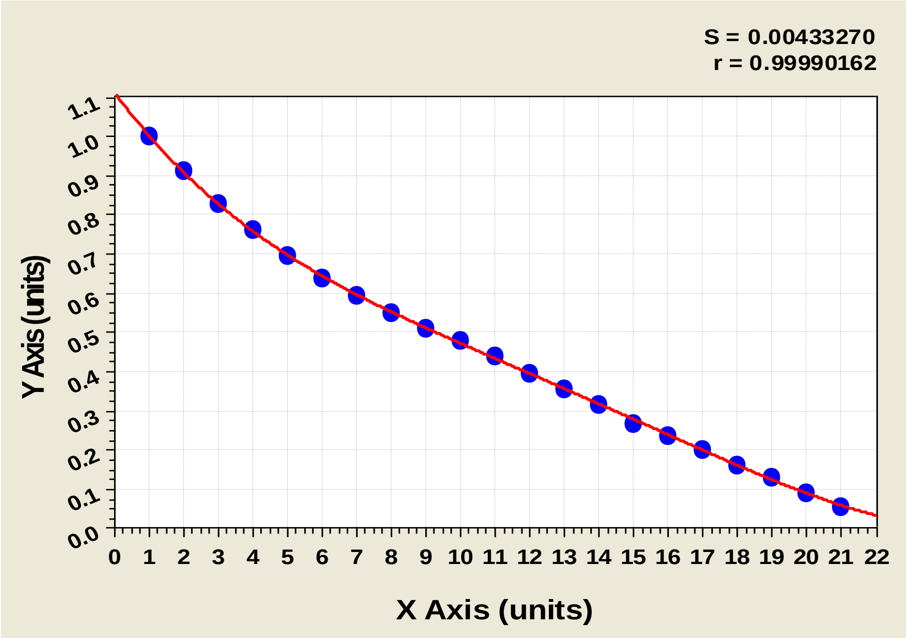

Рисунок 7 — Аппроксимация экспериментальных данных полиномом

$$B1(k) = a_0 + a_1|k| + a_2k^2 + a_3|k|^3 + a_4k^4, \tag{4}$$

оптимальные коэффициенты которого принимают следующие значения:

a_0=1.1115545,

a_1=-0.11877038,

a_2=0.0092864609,

a_3-0.00046760839,

a_4=8.616713e-006.

Параметры полинома также можно просмотреть во вкладке Information (рисунок 8).

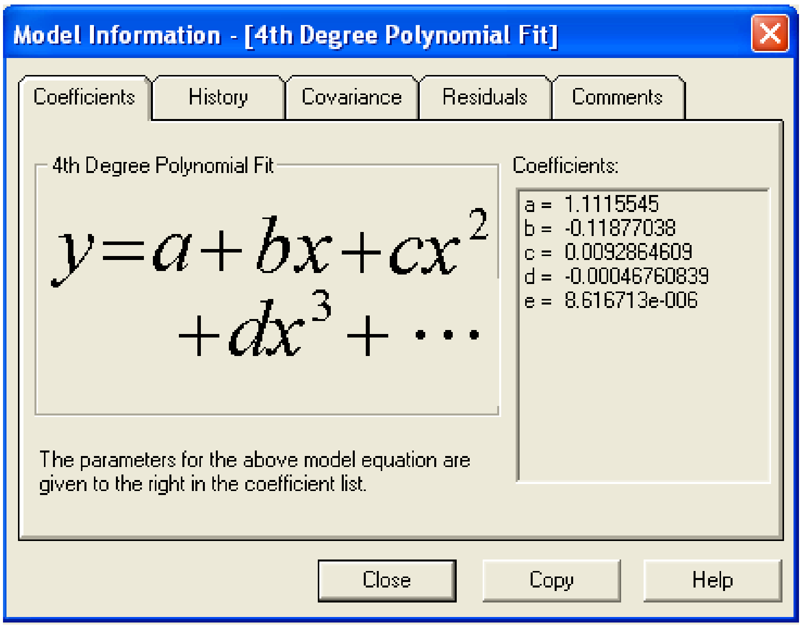

Рисунок 8 — Параметры аппроксимирующего полинома

Для определения спектра мощности случайного процесса методом Уэлча (методом усреднения модифицированных периодограмм) предназначена функция

[Pxx, f] = pwelch(x, Nwin, Noverlap, Nfft, Fs, ‘range’)

Здесь Pxx – вектор значений спектральной плотности мощности, f –вектор той же длины, что и Pxx, содержащий значения частот, которым соответствуют значения спектральной плотности мощности. Шаг между значениями вектора f равен Fs/ Nfft, первый элемент равен нулю.

Единственным обязательным входным параметром является x – вектор отсчетов анализируемого процесса. Все остальные параметры имеют значения по умолчанию. Они используются, если при вызове в качестве параметра указана пустая матрица ([]) или если несколько последних параметров опущено. Параметр Nwin управляет выбором окна, используемого для анализа. Параметр Noverlap задает (в отсчетах) перекрытие соседних фрагментов сигнала, для которых вычисляются периодограммы. Параметр Nfft задает размерность БПФ, используемого для вычисления периодограммы. Параметр Fs указывает частоту дискретизации сигнала. Его значение используется для нормировки рассчитанного спектра мощности, а также при расчете возвращаемого вектора f и для оцифровки графика. По умолчанию значение этого параметра равно 2π. Строковый параметр 'range' определяет частотный диапазон для возвращаемого вектора Pxx.

Если выходные параметры при вызове не указаны функция pwelch строит график спектральной плотности мощности с помощью функции psdplot. По умолчанию она задает вывод мощности в децибелах, т.е. в логарифмическом масштабе.

В версиях MATLAB 5.x данный метод спектрального анализа был реализован с помощью функции psd. Она сохранена и в последующих версиях, но считается устаревшей. Поэтому использовать ее не рекомендуется.

Оценим спектры мощности рассматриваемых случайных процессов.

- Для белого шума имеем
  >> pwelch(X0, [], [], [],1)

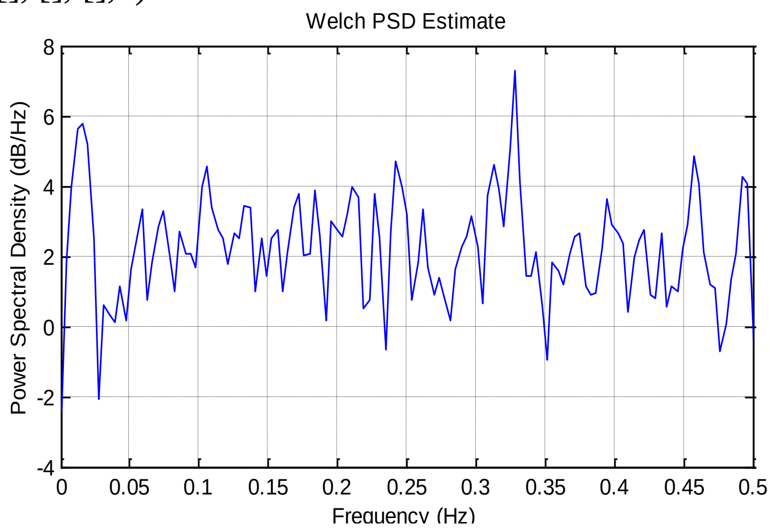

Рисунок 9 — Спектральная плотность белого шума

- Для экспоненциально коррелированного случайного процесса
  >> pwelch(X1, [], [], [],1)

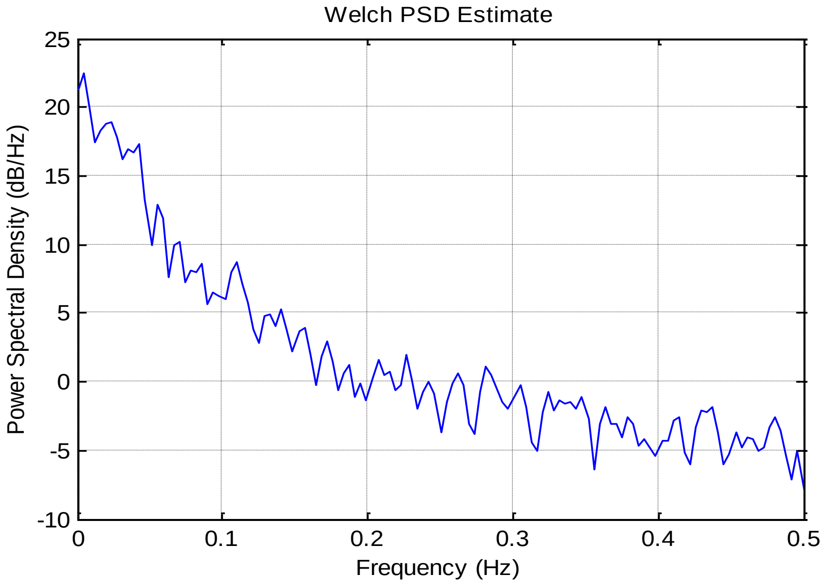

Рисунок 10 — Спектральная плотность экспоненциально коррелированного процесса

Сопоставление рисунков 7 и 8 свидетельствует о существенном изменении спектральных свойств случайного процесса при его фильтрации.

3. ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ, ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1) В соответствии с полученным у преподавателя значением величины коэффициента *a и* вариантом распределения вероятностей смоделировать массив X0 из *N*=10000 некоррелированных отсчетов.

2) Из полученного массива X0 путем фильтрации смоделировать экспоненциально коррелированный случайный стационарный процесс X1.

1) Рассчитать все указанные в предыдущем разделе статистические характеристики процессов X0 и X1. Результаты расчета числовых характеристик величин X0 и X1.

3) Построить соответствующие графики.

Таблица 1 — Распределения вероятностей, команды генерации случайных величин и команды вычисления их числовых характеристик

	Вид распределения	Команда генерации случайной величины	Команда вычисления M_1 и σ^2
	Непрерывные распределения		
1	Бета	X=betarnd(A,B,m,n)	[M,V]=betastat(A,B)
2	Экспоненциальное	X=exprnd(MU,m,n)	[M,V]=expstat(MU)
3	Гамма	X=gamrnd(A,B,m,n)	[M,N]=gamstat(A,B)
4	Логнормальное	X=lognrnd(MU,SIGMA,m,n)	[M,V]=lognstat(MU,SIGMA)
5	Нормальное (гауссовское)	X=normrnd(MU,SIGMA,m,n)	[M,V]=normstat(MU,SIGMA)
6	Релея	X=raylrnd(B,m,n)	[M,V]=raylstat(B)
7	Равномерное	X=unifrnd(A,B,m,n)	[M,V]=unifstat(A,B)
8	Вейбулла	X=weibrnd(A,B,m,n)	[M,V]=weibstat(A,B)
9	Хи-квадрат	X=chi2rnd(NU,m,n)	[M,V]=chi2stat(NU)

10	Нецентральное хи-квадрат	X=ncx2rnd(NU,DELTA,m,n)	[M,V]=ncx2stat(NU,DELTA)
11	Фишера-Снекора (F-распредел.)	X=frnd(V1,V2,m,n)	[M,V]=fstat(V1,V2)
12	Нецентральное F-распределение	X=ncfrnd(NU1,NU2,DELTA, m,n)	[M,V]=ncfstat(NU1,NU2,DELTA)
13	Стьюдента (t-распределение)	X=trnd(NU,m,n)	[M,V]=tstat(NU)
14	Нецентральное t-распределение	X=nctrnd(NU,DELTA,m,n)	[M,V]=nct(NU,DELTA)

В этой таблице: A, B, MU, NU, NU1, NU2, V1, V2, DELTA, LAMBDA, NN, M, K, P, RR – параметры, описывающие распределения; X – матрица размером m×n, состоящая из случайных величин ξ, имеющих указанное распределение; M – математическое ожидание M[ξ] и V – дисперсия случайных величин ξ. Команда из столбца *IV* дает возможность вычислить теоретическое значение МО M_1=M[ξ], обозначаемое здесь как M, и теоретическую дисперсию σ^2, обозначаемую как V.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать следующие пункты:

1) Постановка задачи (вариант задания).
2) Программа генерации белого шума X0 с заданным законом распределения и его графическое изображение.
3) Программа фильтрации шума X0 с целью получения из него случайного процесса X1 с экспоненциальной корреляционной функцией. Дать графическое изображение процесса X1. (Процессы X0 и X1 должны быть центрированными.)
4) Программа расчета гистограмм X0 и X1 с их графическим изображением. Объяснение формы гистограмм, в том числе и их отличия.
5) Программа расчета корреляционных векторов X0 и X1 с определением их численных значения и визуализацией. Объяснение формы полученных рисунков, в том числе и их отличия.
6) Аппроксимация экспериментальных данных экспонентой и полиномом.
7) Расчет и построение спектральной плотности мощности процессов X0 и X1. Объяснение формы полученных рисунков, в том числе и их отличия.
8) Выводы по работе.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Дайте определение белого гауссовского шума?
2) Назовите отличительные особенности белого негауссовского шума?
3) Дайте определение понятию «окрашенный» гауссовский процесс?
4) Укажите отличительные особенности «окрашенного» негауссовского процесса?
5) Дайте определение корреляционной функции случайного стационарного процесса?
6) Дайте определение спектральной плотности случайного стационарного процесса?
7) Какова связь корреляционной функции случайного стационарного процесса с его спектральной плотностью?

8) Сформулируйте понятие характерного масштаба корреляционной функции и спектральной плотности случайного процесса?

9) Расскажите о соотношении неопределенности для случайного процесса?

10) Какие изменения наблюдаются в плотности распределения случайного процесса при его фильтрации? Почему?

11) Какие изменения наблюдаются в корреляционной функции случайного процесса при его фильтрации? Почему?

12) Какие изменения наблюдаются в спектральной плотности случайного процесса при его фильтрации? Почему?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей./ Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

2. Лазарев Ю. MatLAB 5.x./ Юрий Лазарев. – Киев: «Ирина», BHV, 2000. 383 с.

3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов./ А.Б. Сергиенко. – М., С-П., НН, В, РнД, Е, С, К., Х.,М.: ПИТЕР, 2003. – 603 с.